

Нестеров В. В.<sup>1</sup>

## Порождения корневыми подгруппами в группах Шевалле

Настоящая работа представляет собой обзор результатов автора по порождениям корневыми подгруппами в группах Шевалле.

Напомним, что группа Шевалле порождается корневыми унитарными подгруппами, которые являются наиболее важным классом подгрупп.

Пусть  $P$  — приведенная неприводимая система корней. Тогда  $G = G(P, K)$  — группа Шевалле типа  $P$  над полем  $K$ . Для каждого корня  $\alpha \in P$  и  $t \in K$  обозначим через  $x_\alpha(t)$  соответствующий элементарный корневой унитар.

Далее,  $X_\alpha = \{x_\alpha(t), t \in K\}$  — элементарная корневая унитарная подгруппа, соответствующая  $\alpha$ .

Подгруппы, сопряженные с  $X_\alpha$ , т. е. группы вида  $gX_\alpha g^{-1}$ , где  $g$  — некоторый элемент группы  $G$ , называются корневыми унитарными подгруппами.

В системах корней типа  $A_n, D_n, E_n$  все корни одинаковой длины и называются длинными корнями. В системах корней типа  $B_n, C_n, F_4$  и  $G_2$  существуют корни двух различных длин: длинные и короткие. Таким образом, мы имеем длинные/короткие корневые унитарные подгруппы (ДКУП/ККУП).

Порождения ДКУП давно и хорошо изучены, чему посвящено огромное количество работ. В частности, ими занимались такие крупные математики, как М. Ашбахер, Г. Зейтц, В. Кантор, Б. Куперстейн, Ф. Тиммесфельд.

Для ККУП имеются лишь немногочисленные результаты. Неприводимые подгруппы классических групп, порожденные ККУП, описаны Б. Старк и Ли Шанжи. Для алгебраически замкнутого поля подгруппы, порожденные ККУП, описаны в работах Д. Стюарт.

Используя разложение Брюа короткого корневого унитарного элемента, вычисленное Н.А. Вавиловым, в работе [1] были описаны подгруппы, порожденные парой ККУП и классифицированы орбиты таких пар под действием сопряжением.

---

<sup>1</sup>Нестеров Владимир Викторович, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет

На основе этого результата в работе [2] было получено описание подсистемных подгрупп (т. е. подгрупп, которые также являются группами Шевалле) в группе Шевалле типа  $F_4$ . Из этого описания, в частности, следует описание максимальных подгрупп, порождённых тройкой ККУП. Например, оказалось, что группа Шевалле типа  $F_4$  уже порождается тремя ККУП.

Следующими по сложности и важности подгруппами групп Шевалле являются полупростые подгруппы. Среди них наиболее просто устроенными будут микровесовые торы. Заметим, что эти подгруппы принадлежат расширению группы Шевалле, а не самой группе.

Расширением группы Шевалле типа  $A_n$ , т. е. специальной линейной группы  $SL(n, K)$ , будет полная линейная группа  $GL(n, K)$ . В этом случае микровесовыми подгруппами, или  $m$ -торами, будут элементы, сопряженные диагональной группе с  $m$  неединичными элементами на главной диагонали.

Эти группы устроены значительно сложнее, что объясняет наличие лишь отдельных работ по данной теме. В 2007 г. Вавилов Н. А. описал подгруппы в общей линейной группе  $GL(n, K)$ , порождённые парой 1-торов. В статьях [3] и [4] нам удалось классифицировать подгруппы, порождённые парой 2-торов.

## Список литературы

- [1] Нестеров В. В. Порождение пар коротких корневых подгрупп в группах Шевалле // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. С. 172–208.
- [2] Нестеров В. В. Подсистемные подгруппы группы типа  $F_4$ , порождённые короткими корневыми подгруппами // Алгебра и анализ. 2019. Т. 31. С. 92–107.
- [3] Вавилов Н. А., Нестеров В. В. Подгруппы, порождённые парой 2-торов в  $GL(5, K)$  // Записки научных семинаров ПОМИ. 2023. Т. 522. С. 8–45.
- [4] Nesterov V. V., Zhang M. Subgroups generated by a pair of 2-tori in  $GL(4, K)$ . I // Записки научных семинаров ПОМИ. 2024. Т. 531. С. 127–146.